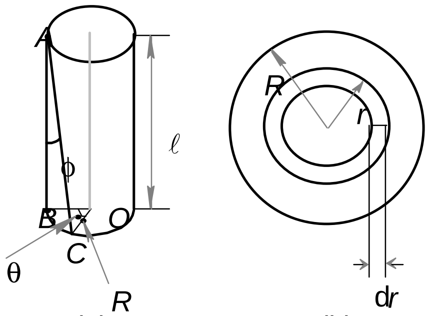
附錄：

下面我們考慮實驗中使用的扭擺。由於吊掛扭擺所用的鋼絲可視為長圓柱狀，所以我們討論圓柱體的扭轉形變。假設一圓柱長 ℓ，半徑 R，上端固定，垂直懸掛，只在下端受一外加力矩作用，使此圓柱扭轉，見下圖(*a*)。假設未扭轉時圓柱上的鉛直線段 AB，在扭轉後移至 AC，圓柱上的角 BAC為 ϕ，而底面上弧 BC 的圓心角為θ，則我們可以得到下列近似關係式：$\ell\phi = R\theta = BC$ 弧。



(*a*) (*b*)

現在考慮底端圓面的情形。我們可將這個圓區域視為許多圓環組合而成，見左圖(*b*)。任意取其中一環半徑為 r，環寬為 $\mathrm{d}r$ 的空心圓柱，將之沿長軸方向切開後可展開為一長方體。則此環被扭轉角度θ時，相當於所展開的長方體產生$r\theta$的側向形變。如果所受之應力為$\mathrm{d}F$，面積為 $\mathrm{d}A = 2\pi r\cdot \mathrm{d}r$，切應變為 $r\theta/\ell$，則剛性係數 n 為：

$$n = \frac{\sigma_S}{\varepsilon_S} = \frac{dF/2\pi r\cdot dr}{r\theta/\ell} = \frac{\ell}{2\pi r^2\theta}\frac{dF}{dr} \quad ,$$

即 $\mathrm{d}F = 2\pi\, n\dfrac{\theta}{\ell}r^2\mathrm{d}r$ ，此力對圓心 O 造成之力矩為 $\mathrm{d}\tau = r\cdot \mathrm{d}F$，積分可得所有外力在整個圓面上對圓心 O 之力矩

$$\tau = \int r\mathrm{d}F = \int_0^R 2\pi n\frac{\theta}{\ell}r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi n\theta R^4}{2\ell} \quad ,$$

整理可得

$$n = \frac{2\ell\tau}{\pi\theta R^4} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{n\pi R^4}{2\ell}\theta = n\frac{\pi R^3}{2}\frac{R\theta}{\ell} = n\frac{\pi R^3}{2}\frac{\delta}{\ell} = n\ell_p\frac{\delta}{\ell} \ ,$$

由此可得對實心的圓柱體而言，其polar moment of inertia $I_P = \pi R^3/2$。此時若圓柱保持平衡不動，則必存在由回復力造成之力矩 $-\dfrac{\pi n\theta R^4}{2\ell}$ 。